Corrigé du DS1-LM270 du 14 février 2014

A.Ben Abdesselem

Université Paris 6, Groupe Sorbonne.

Problème.
Dans ce problème, n est un entier supérieur ou égal à 2. On note $M_n(\mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients réels.
Pour tout couple $(i,j) \in \{1,2,...,n\}^2$, on note E_{ij} la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les cofficients sont nuls excepté le coefficient de la i^{ieme} ligne, j^{ieme} colonne qui vaut 1.

Partie 1
1. Si $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ alors :

$$A = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}). \qquad (*)$$

Cette dernière somme est donc nulle si et seulement si $A = 0$ (où 0 désigne la matrice nulle).
Or une matrice est nulle si et seulement si tous ses cofficients sont nuls. Par conséquent $a_{ij} = 0$ pour tout $1 \le i,j \le n$. La famille $\{E_{ij}\}$ est donc libre. D'autre part, l'égalité $(*)$ montre que la famille E_{ij} est aussi une famille génératrice de $M_n(\mathbb{R})$. C'est donc une base de $M_n(\mathbb{R})$.

2-a. Le rang d'une matrice est le nombre maximum de vecteurs colonnes (ou lignes) linéairement indépendants. Pour E_{ij}, toutes les colonnes sont nulles sauf la j-ième. On a donc $rg(E_{ij}) = 1$, et ce pour tout $(i,j) \in \{1,2,...,n\}^2$. (Attention! Le rang n'est pas le nombre maximum de vecteurs non nuls, ici c'est le cas car il n'y a qu'UN SEUL vecteur non nul).
2-b. Le polynôme caractéristique E_{ij} est $P_{ij} = \det(E_{ij} - XI_n)$. Il s'agit donc du déterminant d'une matrice triangulaire. Il est donc donné par le produit des éléments diagonaux. Par conséquent, on a :
$P_{ii} = (-X)^{n-1}(1-X)$, et pour $i \neq j$, on a $P_{ij} = (-X)^n$.
2-c. Pour $i \neq j$, d'après 2-b, la seule valeur propre de E_{ij} est zéro. Donc si E_{ij} était diagonalisable pour $i \neq j$, elle serait semblable à la matrice nulle qui est de rang égal à zéro. Or deux matrices semblables ont même rang. Par conséquent E_{ij} n'est pas diagonalisable pour $i \neq j$. (Rq: pour $i = j$, elle est elle-même diagonale).

3. On note $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
3-a. $e_i = (0, .., 0, 1, 0, .., 0)$ où 1 est la i-ème composante.
3-b. Les composantes de $u_{ij}(e_k)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont par définition les composantes du k-ième vecteur colonne de la matrice E_{ij} dans cette même base. Or, il n'y a que la j-ième colonne qui n'est pas nulle. De plus, elle est donnée par le vecteur colonne dont toutes les composantes sont nulles sauf la i-ème qui vaut 1. Il s'agit donc du vecteur e_i. Par conséquent : $u_{ij}(e_k) = 0$ pour $k \neq j$. Et pour $k = j$, $u_{ij}(e_j) = e_i$.

4. On suppose $i < j$ (même démo pour $j < i$). E_{ij} est la matrice de u_{ij} dans la base canonique : $\mathcal{B} = (e_1, .., e_i, ...e_j, ..., e_n)$. En permutant e_i et e_j, on obtient la base $\mathcal{B}' = (e_1, .., e_j, ...e_i, ..., e_n)$. Dans cette dernière base la matrice de u_{ij} est bien E_{ji} (l'identité $u_{ij}(e_j) = e_i$ montre que l'unique 1 est se trouve à la j-ème ligne et la ième colonne puisque l'on a permuté e_i et e_j). Ces deux matrices sont donc semblables.

5. Les colonnes de $E_{ij}E_{kl}$ sont les $E_{ij}C_\alpha$ où les C_α ($\alpha \in \{1, .., n\}$) sont les colonnes de E_{kl}. Or ces dernières sont toutes nulles sauf C_l qui est égale au k-ième vecteur colonne de base e_k. Or $E_{ij}e_k$ n'est rien d'autre que la k-ième colonne de E_{ij}. C'est à dire le vecteur nul si $j \neq k$ et e_i pour $j = k$.
En résumé : Pour $j \neq k$, $E_{ij}E_{kl}$ est la matrice nulle et pour $j = k$, $E_{ij}E_{kl}$ est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la l-ième qui est égale à e_i, ou encore $E_{ik}E_{kl} = E_{il}$.
Rq : On peut aussi utiliser 3-b et la composition des applications.

Partie 2

Dans cette partie, p est un entier supérieur ou égal à 2 et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension p. On se donne une base $(e_1, ..., e_p)$ de E et un entier q tel que $1 \leq q \leq p - 1$. On considère l'espace vectoriel $F = Vect(e_1, ..., e_q)$ engendré par $(e_1, ..., e_q)$. On note E^*, l'espace dual de E.
On désigne par $(\sigma_1, ..., \sigma_p)$ la base duale de $(e_1, ..., e_p)$ (on rappelle que $(\sigma_1, ..., \sigma_p)$ est la base sur E^* dont les éléments vérifient $\sigma_k(e_j) = \delta_{kj}$).
6. On a $\sigma = \sigma(e_1)\sigma_1 + ... + \sigma(e_p)\sigma_p$. En effet, pour tout $v = v_1e_1 + ... + v_pe_p \in E$, sachant que $\sigma_i(v) = v_i$, on a :

$$\sigma(v) = \sigma(v_1e_1 + ... + v_pe_p) = v_1\sigma(e_1) + ... + v_p\sigma(e_p) = \sigma(e_1)\sigma_1(v) + ... + \sigma(e_p)\sigma_p(v).$$

7. Si $\forall x \in F, \sigma(x) = 0$, alors en particulier on a $\sigma(e_i) = 0$ pour tout $i \in \{1, .., q\}$. Par conséquent

$$\sigma = \sigma(e_1)\sigma_1 + ... + \sigma(e_p)\sigma_p = \sigma(e_{q+1})\sigma_{q+1} + ... + \sigma(e_p)\sigma_p,$$

ce qui veut dire que $\sigma \in Vect(\sigma_{q+1}, ..., \sigma_p)$.
Réciproquement, si $\sigma \in Vect(\sigma_{q+1}, ..., \sigma_p)$, alors $\sigma = a_{q+1}\sigma_{q+1} + ... + a_p\sigma_p$. Par conséquent les éléments de F annulent σ. En effet, les éléments de F étant des combinaisons linéaires

de e_1, ...,e_q ils sont annulés par tous les σ_i pour $i > q$ (car $\sigma_i(e_j) = 0$ pour $i \neq j$). Il y a donc équivalence entre les deux propriétés.

8. D'après la question 7, G est le sous espace vectoriel de E^* engendré par $(\sigma_{q+1}, ..., \sigma_p)$. Si ce dernier est de dimension 1, alors par définition de F, G est $Vect(\sigma_p)$ et F est l'espace vectoriel engendré par $(e_1, .., e_{p-1})$.

<u>Partie 3</u>

Dans cette partie, on pose $E = M_n(\mathbb{R})$. Soit $\sigma : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in E$ par :

$$\sigma(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

9. Rappelons que que la somme de deux matrices est donnée par :

$$(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} + (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n} = (a_{ij} + b_{ij})_{1\leq i,j\leq n},$$

et que la multiplication par un scalaire λ est donnée par $\lambda(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} = (\lambda a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Il est alors évident que $\sigma(A + B) = \sigma(A) + \sigma(B)$et que $\sigma(\lambda A) = \lambda\sigma(A)$. Par conséquent σ est un élément de E^*.

10. Soient $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ deux éléments de E. On pose $C = AB$ et $C = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.

10-a. Par la définition d'un produit de deux matrices on a : $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Par conséquent $c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$.

10-b. D'après le 10-a on a

$$\sigma(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik} = \sigma(BA).$$

11. Dans cette question on se donne $\tau \in E^*$ vérifiant $\tau(AB) = \tau(BA)$, pour tout $(A, B) \in E^2$.

11-a. En utilisant la propriété de τ et la question 5, on a :

$$\tau(E_{ij}) = \tau(E_{ii}E_{ij}) = \tau(E_{ij}E_{ii}) = \tau(0) = 0.$$

11-b. Pour les mêmes raisons, on a $\tau(E_{ii}) = \tau(E_{ij}E_{ji}) = \tau(E_{ji}E_{ij}) = \tau(E_{jj})$.

11-c. Soit $M = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$, M se décompose dans la base $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ de $M_n(\mathbb{R})$ de la manière suivante : $M = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}E_{ij}$, d'où $\tau(M) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}\tau(E_{ij})$. Par conséquent d'après les questions 11-a et 11-b, on a :

$$\tau(M) = \sum_{1\leq i\leq n} a_{ii}\tau(E_{ii}) = \lambda \sum_{1\leq i\leq n} a_{ii} = \lambda\sigma(M),$$

où $\lambda = \tau(E_{ii})$ (les $\tau(E_{ii})$ étant tous égaux à un même réel λ).

12. On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les matrices de la forme

$AB-BA$. D'après la question précédente, l'ensemble des formes de E^* qui s'annulent sur F est de dimension une (il est engendré par σ). Par conséquent, sachant que $\dim E = n^2$ la dimension de F est égale à $n^2 - 1$.
Rq : On peut même déduire un résultat plus fort : On a $F \subset \ker \sigma$. Or $\dim \ker \sigma = n^2 - 1$. Ces deux espaces vectoriels ont donc la même dimension (avec $F \subset \ker \sigma$). Par conséquent $F = \ker \sigma$.